前　言

大众化高等教育的普及, 使更多的学生有受高等教育的机会, 为培养更多的高素质人才创造了有利条件. 但高校扩招, 也导致普通高校教学班学生数量增多、师资配备不足、学生学习能力不强等诸多问题, 这给高等数学教学带来重重困难, 学生高等数学学习达不到教学质量要求, 部分学生厌学, 甚至弃学.

传统的高等数学教材注重完备化、形式化、抽象化、逻辑化, 这种教材模式严密抽象、逻辑性强, 有不可替代的优点, 但学生看到的是定义、性质、定理、法则、公式、证明、例题等完美的数学推导过程和结论, 却难以理解其实质. 按这样的教材编写方式, 要想理解、掌握和运用好数学知识, 学生要投入大量精力和时间刻苦钻研, 教师要跟踪指导, 可目前这些很难做到. 因此, 编写一本适应大众化高等教育需要, 通俗、易懂、简洁而又不降低难度的高等数学教材, 是我们不断追求的目标.

本书是我们多年研究与实践的成果, 教材编写改革了传统高等数学教材编写形式, 有鲜明的特色与创新, 主要表现在:

(1) 教材内容编写注重知识的逻辑结构和体系设计, 对传统教材体系结构做了较大调整, 使学生便于理解和记忆, 做到“一通百通”. 如对数列极限和函数极限的研究, 我们就是按相似的研究思路设计的.

(2) 在概念、定理引入时, 注重介绍知识产生的背景和实际应用渗透. 对于非数学专业的学生而言, 数学是他们解决本专业问题的工具, 数学思想和方法对他们影响深远, 因此, 在实际应用中产生的数学思想和方法对学生的专业学习和培养高等数学学习兴趣十分重要.

(3) 教材内容编写不拘于形式, 根据每一部分内容特点确定编写思路, 注重探究性. 在内容编写中, 注重培养学生研究性学习能力, 对于能让学生自己探索发现的知识, 设计探索发现过程, 引导学生自己探究得到, 而不是事先将知识表述出来, 如导数的四则运算法则就是这样设计的. 有些定理、例题给出了证明和解答思路, 如极限的性质证明; 有些证明较复杂的定理和证明思路与其他定理证明相似的定理省略了证明过程, 只给予必要的说明; 有些不便引导学生探究或比较容易证明的定理、法则、公式、例题, 直接给予证明和解答. 通过这样的灵活设计, 注重了知识的本质把握, 淡化了形式, 将枯燥的数学表述通俗化, 增强了教材的亲和力, 使读者有“一目了然”之感.

(4) 每一节设计了一些问题讨论题, 这些问题基本都是开放性的, 目的是帮助学生检验学习效果, 引导学生加深知识的理解, 认清知识本质, 澄清易混淆和没有引起注意的问题, 提高学生的思维深刻度. 同时, 还设计了小结, 目的是让学生对本节内容有一个整体把握. 每一节习题设计做到简洁、到位、够用即可, 避免不提高学生能力的低认知水平的重复训练, 给学生留有更多的学习思考空间.

(5) 我们对每章知识的结构体系和重点内容进行了比较详细的总结, 引导学生反思, 建立知识的结构体系. 最后, 按基础知识考查和综合能力提高设计了 A, B 组测试题, 供学生进行自我检测, 做到对自己每章的学习情况心中有数.

(6) 在达到教学大纲要求的前提下, 在编写内容和习题设计上, 增加了拓展内容（书中带*号的部分即是）, 供学有余力的同学作为拓展学习使用.

本书第 1, 2, 3 章由孙立民编写, 第 4, 5 章由林全文编写, 第 6 章由黄寿生编写, 第 7 章由汪富泉编写, 第 8, 9 章由李伟勋编写, 第 10, 11 章由伍思敏编写. 全书由孙立民、汪富泉统稿. 书中插图和课件由李伟勋制作. 除书中主要编写教师外, 广东石油化工学院理学院数学系与应用数学系的教师在实践中也提出了许多改进意见, 已融入教材编写中.

尽管本书编写过程中参考了大量中外教材, 但由于编者水平有限, 疏漏之处在所难免, 希望使用者批评指正.

孙立民

2017 年 3 月

目　　录

第 1 章　数列与函数极限

1.0　预 备 知 识

1. 实数集

高等数学主要研究函数的变化规律, 而函数是在实数域内定义的. 实数是全体有理数和全体无理数的统称, 常用字母 **R** 表示. 我们将全体有限小数和无限循环小数称为有理数, 用 **Q** 表示; 全体无限不循环小数称为无理数, 用 **R**/**Q** 表示. 实数与直线通过数轴(规定了原点、单位长度和正方向的直线)建立了一一对应关系, 因此, 实数可以刻画几何图形, 几何图形也可通过实数方程表示, 这正是实数集的价值所在.

实数集有以下几个基本性质:

(1) **四则运算的封闭性**　两个实数加、减、乘、除(除数不为 0)后还是实数;

(2) **有序性**　对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, $a<b, a>b, a=b$, 三者必有其一成立;

(3) **稠密性**　对 $\forall a, b \in \mathbf{R}$, 若 $a<b$, 则存在实数 c, 使得 $a<c<b$, 即 a, b 之间存在无穷个实数 c;

(4) **阿基米德性**　对 $\forall a,b \in \mathbf{R}$, 若 $b>a>0$, 则存在正整数 n, 使得 $na>b$.

2. 邻域

设 a 是一实数, δ 是一正数, 称集合

$$U(a,\delta)=\left\{x \middle| a-\delta<x<a+\delta\right\}=\left\{x \middle| |x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a,\delta)$, 其中点 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径.

$\overset{\circ}{U}(a,\delta)=\left\{x \middle| 0<|x-a|<\delta\right\}$ 称为 a 的去心 δ 邻域.

3. 函数

函数的定义: 设 A, B 是非空的实数集, A 到 B 的映射 $f: A \to B$, 称为定义在 A 上的函数, 记为 $y=f(x)$, 这里 A 为函数的定义域, $f(A) \subseteq B$ 为函数的值域.

函数的表示方法主要有以下几种方法: 解析法($f(x)$ 用关于 x 的代数式表

示)、图像法、列表法、参数方程法(函数的自变量 x 与因变量 y 均用关于新变量 t 的代数式表示)、方程表示法(函数用关于自变量 x 与因变量 y 的代数方程表示).

函数需要研究的基本性质: 定义域、值域、有界性、单调性、奇偶性、周期性.

4. 反函数与复合函数

反函数 设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射, 则它存在逆映射 $f^{-1}:f(D)\to D$, 称映射 f^{-1} 为 f 的反函数, 记成 $y=f^{-1}(x)$, $x\in f(D)$.

按此定义, 对每个 $y\in f(D)$, 有唯一的 $x\in D$, 使得 $f(x)=y$. 于是有 $f^{-1}(y)=x$. 反函数 f^{-1} 的对应法则完全由函数 f 的对应法则确定.

例如, 函数 $y=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ 是单射, 所以它的反函数存在, 其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$, $y\in\mathbf{R}$; 函数 $y=\tan x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 是单射, 所以, 它的反函数存在, 其反函数为 $x=\arctan y$, $y\in\mathbf{R}$.

由于习惯上自变量用 x 表示, 因变量用 y 表示, 于是 $y=x^3$, $x\in\mathbf{R}$ 的反函数通常写作 $y=x^{\frac{1}{3}}$, $x\in\mathbf{R}$; $y=\tan x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数通常写作 $y=\arctan x$, $x\in\mathbf{R}$.

一般地, 函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 的反函数记成 $y=f^{-1}(x), x\in f(D)$.

若 f 是定义在 D 上的单调函数, 则 $f:D\to f(D)$ 是单射, 于是 f 的反函数 f^{-1} 必定存在, 而且容易证明 f^{-1} 也是 $f(D)$ 上的单调函数.

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上, 这两个图形关于直线 $y=x$ 是对称的. 因为, 如果 $P(a,b)$ 是图形上的点, 则有 $b=f(a)$. 按反函数的定义, 有 $a=f^{-1}(b)$, 故 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点; 反之, 若 $Q(b,a)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 图形上的点, 则 $P(a,b)$ 是 $y=f(x)$ 图形上的点. 而 $P(a,b)$ 与 $Q(b,a)$ 是关于直线 $y=x$ 对称的(图 1.0.1).

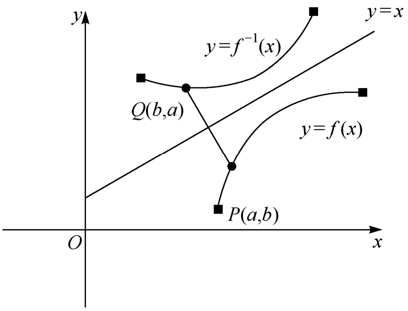

图 1.0.1

复合函数 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1, 函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$, 则由下式确定的函数:

$$y=f\left[g(x)\right],\quad x\in D$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$，即

$$f\circ g(x)=f\left[g(x)\right].$$

g 与 f 构成复合函数 $f\circ g$ 的条件: 函数 g 在 D 上的值域 $g(D)$ 必须含在函数 f 的定义域 D_f 内，即 $g(D)\subset D_f$. 否则，g 与 f 不能构成复合函数.

例如，$y=f(u)=\arcsin u$ 的定义域为 $\left[-1,1\right]$，$u=g(x)=2\sqrt{1-x^2}$ 在

$$D=\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\bigcup\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$$

上定义，$g(D)\subset\left[-1,1\right]$，则 g 与 f 可构成复合函数

$$y=\arcsin 2\sqrt{1-x^2}\,,\quad x\in D\,.$$

函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 不能构成复合函数，这是因为对任一 $x\in\mathbf{R}$，$u=2+x^2$ 均不在 $y=\arcsin u$ 的定义域 $\left[-1,1\right]$ 内.

5. *函数的运算*

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域依次为 D_1，D_2，$D=D_1\bigcap D_2\neq\varnothing$，则我们可以定义这两个函数的下列运算:

和(差) $f\pm g$：$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x)$，$x\in D$；

积 $f\cdot g$：$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$，$x\in D$；

商 $\dfrac{f}{g}$：$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，$x\in D/\left\{x\mid g(x)=0\right\}$.

6. *初等函数*

基本初等函数　常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等六类函数称为基本初等函数.

初等函数　由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合运算得到的函数称为初等函数.

1.1　数列极限的定义

极限概念是由对某些实际问题的精确解答产生的. 极限理论是高等数学最重要的基础，极限方法是高等数学处理问题的最基本的方法，它贯穿于高等数学内容的全过程. 因此，要学好高等数学就必须理解好极限的思想及其基本性质. 作

为高等数学基础的极限理论, 我国早在古代就有了比较清晰的论述. 如庄周所著的《庄子》一书中的“天下篇”中就记有“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”, 就是很朴素的极限思想.

定义 1　按自然数顺序排列起来的一列数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 称为数列, 记为 $\{a_n\}$ 或 $a_n(n=1,2,\cdots)$, 其中数列中的每一个数叫做数列的项, 第 n 项 a_n 叫数列的一般项或通项.

以下为数列的实例:

(1) $-1,1,-1,\cdots,(-1)^n,\cdots$, 通项为 $(-1)^n$;

(2) $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$, 通项为 $\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$.

一个数列可以看作是自变量取自然数的函数 $a_n=f(n)$, $n=1,2,\cdots$.

定义 2　设 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 为一正整数列, 则称 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的子数列.

例如, 数列 $\{a_n\}$: $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$ 的一子数列 $\{a_{2k}\}$ 为: $-1,-1,-1,\cdots,(-1)^{2k-1},\cdots$.

对于一些数列, 如 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\left\{\dfrac{n+1}{n}\right\},\left\{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$, 当 n 无限增加时, 一般项都无限接近于某一个常数, 如图 1.1.1 所示. 这个常数称为数列的极限. 在数学上, 需要从定量角度定义数列极限的概念.

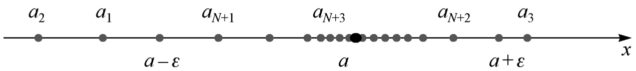

图 1.1.1

给定一个数列 $\{a_n\}$ 和常数 a, 为证明 $\{a_n\}$ 的极限为 a, 需要证明 n 越来越大时, $|a_n-a|$ 越来越趋于 0. 为了定量描述随 n 增大, $|a_n-a|$ 逐渐接近于 0, $\{a_n\}$ 与 a 的接近程度可用任意小的正数 ε, $|a_n-a|<\varepsilon$ 代替. ε 越小, $\{a_n\}$ 越接近于 a, 使 $|a_n-a|<\varepsilon$ 的 n 越大. 因此, 给定一个正数 ε, 就存在一个正整数 $N\in\mathbf{Z}^+$, 当 $n>N$ 时, $|a_n-a|<\varepsilon$, ε 越小, N 就越大. 这样, 我们从数学定量的角度得到数列极限的如下定义.

定义 3　设 $\{a_n\}$ 是数列, a 为常数, 若对任意给定的正数 ε, 总可以找到正整数 N, 使得所有满足 $n>N$ 的自然数 n, 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, a 称为数列 $\{a_n\}$ 的**极限**, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 或 $a_n\to a(n\to\infty)$.

显然，要证明数列$\{a_n\}$的极限为a，只要对任意给定的正数ε，找到满足定义的N即可，这里N要通过$|a_n-a|<\varepsilon$找到.

定义中使用的语言称为$\varepsilon-N$语言. 这里ε要任意小，才能表明数列$\{a_n\}$能逼近a；N与ε有关，它随ε的给定而确定，但N的值不是唯一的，比N大的正整数均可代替N.

例 1　对数列$\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$，当取$\varepsilon_1=0.1$，$\varepsilon_2=0.01$时，求满足$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_1$，$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_2$的$n$的范围，并证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

解　因为$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}$，所以要使$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_1=0.1$，只要$\dfrac{1}{n}<0.1$，即$n>10$即可. 同理，可求满足$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon_2=0.01$，只要$n>100$即可.

现证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

对任意给定的$\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，因此，可以取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$ $\left(\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\text{可能为}0\right)$，当$n>N$时，就有$\left|\dfrac{(-1)^n}{n}-0\right|<\varepsilon$，故$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$.

例 2　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$.

分析　因为

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1},$$

所以，对于$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|<\varepsilon$，只要$\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$，即$n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$即可.

证明　$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+2$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|=\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^2}=0$.

注　在本例题中，对 $\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2}-0\right|$ 进行适当变形和放大，是为由 ε 确定的 N 更容易求. 但注意不能放大过大，要保证当 $n\to\infty$ 时，放大的式子极限为 0. 取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+2$ 是为保证 $N\in\mathbf{Z}^+$.

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3}$.

证明　因为 $\left|\frac{2n-1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{6n-3-6n+2}{3(3n-1)}\right|=\frac{1}{9n-3}<\frac{1}{n}$，所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，要使 $\left|\frac{2n-1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$. 因此，取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{2n-1}{3n-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n-1}=\frac{2}{3}$.

如果数列 $\{a_n\}$ 没有极限，则称该数列发散.

我们还可以用数列极限的定义证明如下重要极限:

$$\lim_{n\to\infty}c=c,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}a^n=0(|a|<1),\quad \lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1(a>0),\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

问题讨论

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，能否得到结论: 对任意给定的正数 ε，总可以找到正整数 N，使得所有满足 $n>N$ 的自然数 n，都有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon^2)$ 成立?

2. 在数列极限定义的 $\varepsilon-N$ 语言中，对任意给定的正数 ε，可否规定 $0<\varepsilon<1$?

小结

本节给出了数列极限定义定量刻画的 $\varepsilon-N$ 语言，研究了用 $\varepsilon-N$ 语言证明数列极限的方法，并对数列极限定义中的 ε 和 N 取法进行了分析.

习　题　1.1

1. 用数列极限定义证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}=0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n^2}=0$;　　　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$.

2. 证明: 对实数 a,b, $a=b \Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $|a-b|<\varepsilon$.

3. 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a \Leftrightarrow$ 对 $\forall\varepsilon>0$, $U(a,\varepsilon)$ 之外只有数列 $\{a_n\}$ 有限项.

4. 利用不等式 $||a|-|b||\leqslant|a-b|$, 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, 并说明这个命题的逆命题不一定成立.

1.2　收敛数列的性质

根据 1.1 节数列极限的定义, 我们可以得到收敛数列的一些性质.

若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 自然会考虑到其极限是否唯一, 若数列 $\{a_n\}$ 收敛于两个不同的极限, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, 则对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 与 $|a_n-b|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 同时成立, 故

$$|a-b|=|a-a_n+a_n-b|\leqslant|a_n-a|+|a_n-b|<\varepsilon,$$

由 ε 的任意性, 可得 $|a-b|=0$, 即 $a-b=0$. 这样, 我们得到收敛数列极限的唯一性.

定理 1 (极限的唯一性)　若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

给定数列 $\{a_n\}$, 若 $\exists M>0$, 使得对 $\forall n$, 有 $|a_n|\leqslant M$, 则称数列 $\{a_n\}$ 是有界的.

设数列 $\{a_n\}$ 收敛, 且收敛于 a, 根据数列极限的定义, 对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在正整 N, 当 $n>N$ 时, 不等式 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 取 $\varepsilon=1$, 则 N 是可以确定的, 于是, 当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n|=|a_n-a+a|\leqslant|a_n-a|+|a|<1+|a|,$$

取 $M=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_N|,1+|a|\}$, 则数列 $\{a_n\}$ 中的一切 a_n 都满足不等式 $|a_n|\leqslant M$. 这就证明了数列 $\{a_n\}$ 是有界的. 这样, 可得到收敛数列的有界性.

定理 2 (收敛数列的有界性)　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{a_n\}$ 一定有界.

用同样的研究方法, 我们可得收敛数列的保号性.

定理 3 (收敛数列的保号性)　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 且 $a>0$ (或 $a<0$), 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时, 有 $a_n>0$ (或 $a_n<0$).

当 $a>0$ 时, 按极限定义, 只要取 $\varepsilon=\dfrac{a}{2}>0$, 即可证明结论.

推论　如果数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 且 $a\neq0$, 那么存在正整数 N, 当 $n>N$ 时,

有$|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.

定理 4 (收敛数列与其子数列间的关系)　如果数列$\{a_n\}$收敛于a, 那么它的任一子数列也收敛, 且极限也是a.

证明　设数列$\{a_{n_k}\}$是数列$\{a_n\}$的任一子数列. 因为数列$\{a_n\}$收敛于a, 所以, 对$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 当$n > N$时, $|a_n - a| < \varepsilon$, 取$K = N$,则当$k > K$时, $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ (因为$n_k \geqslant k > K = N$), 这就证明了$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

利用数列极限的定义和定理 2, 以及定理 3 的推论可证数列极限的如下运算性质.

定理 5 (数列的运算)　若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$且$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则有

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.

例 1　如果数列$\{a_n\}$从某项起有$a_n \geqslant 0$(或$a_n \leqslant 0$), 且数列$\{a_n\}$收敛于a, 证明$a \geqslant 0$(或$a \leqslant 0$).

本题可利用定理 3, 通过反证法证明.

证明　就$a_n \geqslant 0$的情形证明. 设数列$\{a_n\}$从N_1项起, 即当$n > N_1$时有$a_n \geqslant 0$. 现在用反证法证明, 若$a < 0$, 则由定理 3 知, $\exists N_2 \in \mathbf{Z}^+$, 当$n > N_2$时, 有$a_n < 0$. 取$N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当$n > N$时, 有$a_n \geqslant 0$与$a_n < 0$同时成立, 矛盾, 所以$a \geqslant 0$.

例 2　计算$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$.

本题可通过分子分母同除以5^n, 利用极限四则运算法则求得.

解　$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5} = \frac{0+1}{0+5} = \frac{1}{5}.$$

例 3　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

本题可通过分子有理化, 然后利用例 2 方法求得.

解　$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}.$$

问题讨论

1. 有界数列是否一定收敛？发散的数列是否一定无界？

2. 如果数列$\{a_n\}$收敛于a，且对$\forall n\in\mathbf{N}$，有$a_n>0$ (或$a_n<0$)，则是否一定有$a>0$(或$a<0$)？

3. 若数列的任何子数列收敛，此数列是否一定收敛？发散数列的子数列都发散吗？

小结

本节利用数列极限的定义研究了收敛数列极限的唯一性、有界性、保号性、子列的收敛性等基本性质及数列极限的四则运算性质. 数列极限的四则运算性质通过数列极限的定义和收敛数列的基本性质得到.

习　题　1.2

1. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，且存在$N$，当$n>N$时，有$a_n\leqslant b_n$，证明$a\leqslant b$.

2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，$a>b$，证明：存在$N$，当$n>N$时，有$a_n>b_n$.

3. 设数列$\{x_n\}$有界，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

4. 证明定理 5(2).

5. 若数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$都发散，则数列$\{x_n\pm y_n\}$和$\{x_ny_n\}$的收敛性如何？

6. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+2n^2-1}{6n^3-3n+2}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(3n+2)}{5n^2+1}$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

7. 用反证法证明数列极限的唯一性.

1.3　数列收敛的判别

收敛数列具有良好的性质，这些良好性质的运用以数列收敛为前提. 判断一个数列收敛，单纯用数列极限定义证明是远远不够的. 我们还可以通过以下判别准则判别数列的收敛.

判别准则 I (两边夹法则)　设数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$满足条件:

(1) $\exists N_0\in\mathbf{Z}^+$，当$n>N_0$时，$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ (a 为常数),

则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

证明　要证 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$,只需证对 $\forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时, $|c_n-a|<\varepsilon$, 即 $a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon$, 而由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} b_n = a$, 易知对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>N_0$, 当 $n>N$ 时 $a_n>a-\varepsilon$ 与 $b_n<a+\varepsilon$ 同时成立. 再由当 $n>N_0$ 时, $a_n<c_n<b_n$, 当 $n>N$ 时, $a-\varepsilon<a_n\leqslant c_n<b_n<a+\varepsilon$, 所以, 当 $n>N$ 时, $a-\varepsilon<c_n<a+\varepsilon$, 即 $|c_n-a|<\varepsilon$. 所以, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)$.

解　对 $\forall n\in\mathbf{N}$, 我们有

$$n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\geqslant n\cdot\frac{n}{n^2+n\pi}=\frac{n}{n+\pi},$$

$$n\left(\frac{1}{n^2+\pi}+\frac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\frac{1}{n^2+n\pi}\right)\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+\pi}=\frac{n^2}{n^2+\pi},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\pi}{n^2}}=1,$$

由两边夹法则知, $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{1}{n^2+\pi}+\dfrac{1}{n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n\pi}\right)=1$.

判别准则 Ⅱ (单调有界原理)　单调递增有上界的数列和单调递减有下界的数列必存在极限.

本定理证明需要较多的知识, 这里仅从几何角度做一些解释.

设 $\{a_n\}$ 是一单调上升的数列, 且 $\exists M>0$, 使对 $\forall n$, $a_n\leqslant M$. 则数列 $\{a_n\}$ 的通项 a_n 随 n 的增大而不断在数轴上向右平移, 但不会超过点 M. 因此, a_n 必然无限接近于某个实数 $a(a_n<a<M)$, a 便是数列 $\{a_n\}$ 的极限(图 1.3.1).

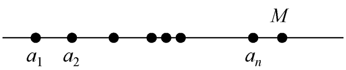

图 1.3.1

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

解　设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 按二项式展开, 得